千葉方式電磁気学習を振り返って［第７回］　—発展—

光のドップラー効果から ローレンツ変換へ

朝 生　邦 夫　　元千葉県立高等学校教員

「ローレンツ変換」を「光のドップラー効果」を考察することによって、簡単に導いてみましょう。これが、ローレンツ変換を導く一番簡単な方法のようです。なお、ドップラー効果について、よくわからないというかたは、前回（第 6 回（2022 年 1 月号））お話ししましたので、そちらを読み直してください。

ここからは一般の高校生にもわかるように丁寧にやさしく書いてみました。

真空中の光のドップラー効果から導くローレンツ変換と相対論 （電磁気学から相対論へ）

授業での実際の展開例

高校で習った「波」の「ドップラー効果」の式が観測者、波源、媒質の間に成り立つ波長や振動数の変化であることを復習しました。これを真空中の光について考察することでローレンツ変換を導入できます。

真空中の光のドップラー効果から相対論への橋渡し

Ⅰ．［復習］媒質を伝わる波（音波など）の場合

もう一度、まず水波や音などの媒質中を伝わる波について復習します。ドップラー効果の式は、振動数で表示します。観測者 O と波源 S とが互いに接近するときを考えます（＊両者が離れる場合などは、符号を変えるだけでよいので、接近時だけを考える）。

n は振動数（1／s）、u は観測者が動く速さ（m／s）、v は波源が動く速さ（m／s）、V は波の速さ（m／s）、λ は波長（m）の記号とします（（　）内は単位）。

波長とは 1 振動（$\dfrac{1}{n}$秒間に波の進む距離（$\dfrac{V}{n}$））のこと。

①波源が静止している観測者に向かって速さ v で近づくとき

⇦ ⇦ V ⇦ ⇦　　　v

観測者 O　　　媒質　　　⟵ 波源 S

媒質に対する波の速さ V は変わらず、波長は$\dfrac{V}{n_0}$（$1-\dfrac{v}{V}$）短くなる。

$\dfrac{v}{n_0}$は、$\dfrac{1}{n_0}$秒間に S が近づく距離。つまり、$\lambda_1=\lambda_0-\dfrac{v}{n_0}=\dfrac{V}{n_0}-\dfrac{v}{n_0}=\dfrac{V}{n_0}\left(1-\dfrac{v}{V}\right)$

媒質中を伝わる波の速さ V は不変だから、波長が短くなる分、観測する振動数は増える。v と V との比の割合で波長が短くなる。

$$n_1 = n_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)}$$

これを （注1）よく知られた級数 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ で展開します。

すると

$$n_1 = n_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)} = n_0\left(1 + \frac{v}{V} + \frac{v^2}{V^2} + \cdots\right)$$

のように変形できます。

［このときはOから見ていることに留意！］

②逆に観測者が波源に向かって近づけば、媒質に対して u で接近する観測者が、その媒質中を V で近づく波の波源を見るのだから、観測者に対する波の相対速度は足し算になり、観測者に対する波の相対速度は（$V + u$）と大きくなります。

$$\text{観測者 O} \xrightarrow{u} \quad \Leftarrow \Leftarrow V \Leftarrow \Leftarrow \quad \text{媒質} \qquad \text{波源 S}$$

［この時も、観測者 O から見ていることに留意！、だからここではガリレイ変換が速度の和に使われていることに留意！！ さらにこの場合、観測者の系と波源と媒質の系での時間の進み方は同じであるとの暗黙の仮定があることにも注意しましょう。］

すると、媒質を伝わる波の波長は不変（ $\lambda_0 = \frac{V}{n_0}$ ）。

O に対する波の相対速度が（$V+u$）だから、観測される振動数 n_2 は、

$$n_2 = \frac{V + u}{\lambda_0} = \frac{V + u}{\frac{V}{n_0}} = n_0 \left(1 + \frac{u}{V}\right)$$

となり、増える。

$$n_2 = n_0\left(1 + \frac{u}{V}\right)$$

［速さの比の割合で振動数が増える］

若干の考察

n_1 と n_2 とは、明らかに違いますね。それは観測者と波源との間に波を伝える媒質があるためです。媒質に対する関係が違うので、例えば u と v とが同じであっても n_1 と n_2 両者の差は、展開した式の２次の項（$\frac{v^2}{V^2}$ ＋ ・・・・・）以降の差となります。

例えば、空気中の音波の場合、音速 V ＝ 340（m／s）、接近の速度を v ＝ 34（m／s）とすると、n_1 が 11．11% 増なのに対して、n_2 は単に 10% 増になります。

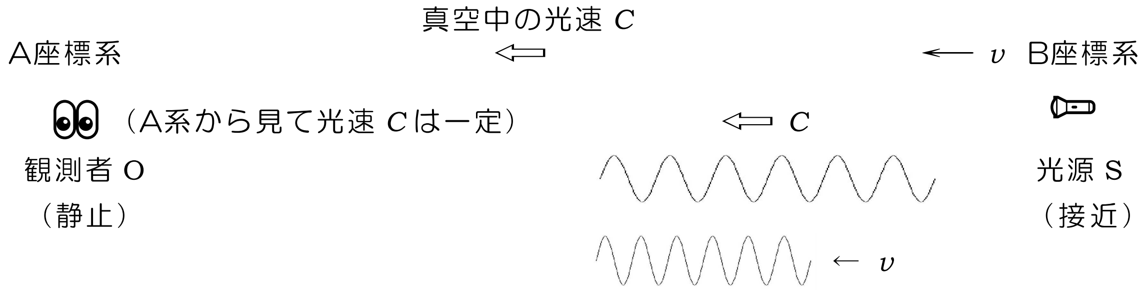
Ⅱ．真空中の光の場合

では、次に本題の真空中の光の場合について考えてみます。

はじめ、ローレンツ *Lorentz* さんなどのように、人々は光を伝える媒質を真空中のエーテル

と考えました。実際には、真空中に媒質はありません。光源（波源）と観測者だけが存在するという条件で考えてみましょう。$V = C$とします。観測者静止、光源接近の場合、光の波長λ_1は音波の場合と同様に短くなり、n_1は、媒質があってもなくても、大きく観測されます。また、観測者接近で光源が静止の系では、光速度は音波の場合とは違って、観測者に対して相対速度$C+u$にならず、Cのままなのですが、観測者から見たn_2は後述のように、振動数が音波の場合と同じように$\dfrac{v}{C}$の割合だけ増える結果になります。この場合は考え方は全く違いますが、結論は一緒なのです。具体的に示してみましょう。

① 観測者静止で光源が近づく場合



A系で観測者Oが静止していて光源Sがvで接近するとき、A系から見て光速Cは一定、

波長λ_0と振動数n_0との関係は、$C = n_0 \cdot \lambda_0$　　$\lambda_0 = \dfrac{C}{n_0}$

光速度Cは一定、光源Sが接近するために、観測者の見る波長が変化する。
これは、音波など、媒質があるときのドップラー効果と同じですね。

新しい波長λ_1は、Sが$\dfrac{1}{n_0}$秒間に近づく距離だけ縮まるから、

$$\lambda_1 = \lambda_0 - v\left(\frac{1}{n_0}\right) = \frac{C}{n_0} - \frac{v}{n_0} = \frac{C}{n_0}\left(1 - \frac{v}{C}\right)$$

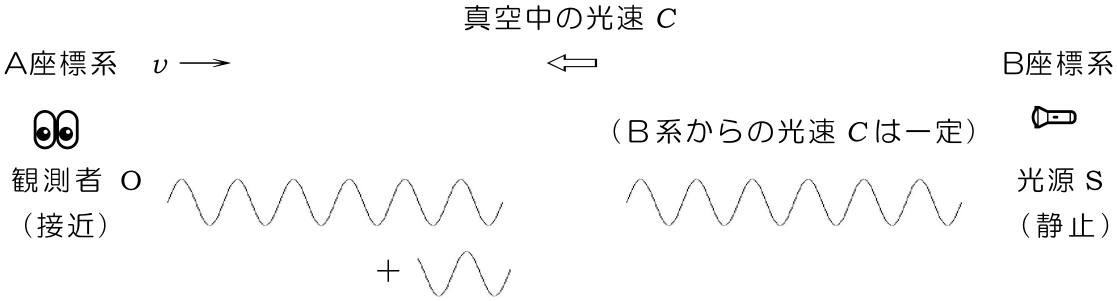
よって、Oの観測する光の振動数n_1は、　$n_1 = \dfrac{C}{\dfrac{C}{n_0}\left(1 - \dfrac{v}{C}\right)} = \dfrac{n_0}{\left(1 - \dfrac{v}{C}\right)}$

$$n_1 = \frac{n_0}{\left(1 - \dfrac{v}{C}\right)} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となります。

これは、A系の観測者Oから見た振動数です。

②視点を変えてSが静止しているとき、このB座標系で観測者Oが接近するとします。



光源Ｓが静止していて、観測者ＯがＳに対して v で接近するとき、振動数が変化する。
Ｂ系から見て、光速 C は一定、波長 λ_0 も変わらない。　$C = n_0 \cdot \lambda_0$　　$\lambda_0 = \dfrac{C}{n_0}$

１秒間に観測者Ｏの目を通過する光の振動数 n_2 は
Ｏが速さ v でＳに近づいていったことで、余計に目に入った波の数だけ増えるから

$n_2 = n_0 + n_0\dfrac{v}{C}$　となりますね。　$n_2 = n_0\left(1 + \dfrac{v}{C}\right)$　　と書けます。

［解説］

この場合、「Ｂ系から見て」が大切。1 秒間に v（m）だけ Ｏ が Ｓ に近づくから、Ｏ が見る光の振動数は 1 秒間に $\dfrac{v}{\lambda_0} = \dfrac{v}{\dfrac{C}{n_0}} = n_0\dfrac{v}{C}$ 振動増加します。よって、Ｏ が 1 秒間に観測する振動数は、$n_2 = n_0 + n_0\dfrac{v}{C}$ となります。これは、Ｂ系で観測される振動数です。

この結論は、媒質がある場合の音波のドップラー効果の結論と同じですが、導き方は全く違っています。音の場合は、Ｏ に対する Ｓ の音の相対速度がＡ系で（$V+v$）となって増えていたのですが、光の場合は、Ａ系から見ても、Ｏに対してはＳからの光の速さは C で不変です。（光速度不変の原理）　ガリレイ変換の速度の足し算にはならないのです。

よってＯが観測する新しい振動数 n_2 は、

$$n_2 = n_0\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

となります。

（音波の場合のように ①と②とは式の形が違いますね。どのくらい違うかというと、前と同様に $n_1 = n_0 \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{v}{C}\right)} \fallingdotseq n_0\left(1 + \dfrac{v}{C} + \dfrac{v^2}{C^2} + \cdots\right)$ で、２次以降の分違うのです。）

ところが、媒質のない真空中では、どちらの視点からでも結果は同じくなることが要請されるので、①、②の振動数を同じにするための最後の可能性としてＡ、Ｂ２つの系の時間の進み方が違うものと仮定してみます。ここがアインシュタイン *Einstein* さんの考え方の革命的なポイントです。**互いの系から相手を見ると時間の経過が k 倍になる**と仮定するのです。

すると①でＡ系で 1 秒（1 振動）経ったと思う間に、Ｂ系では k 秒（k 振動）経過して kn_0 個の波が送り出されているのだから、Ａ系で 1 秒間に検出されるべき Ｓ からの振動数は修正されて kn_0 となり、Ａ系上にあるカウンターの記録する振動数 N_1 は kn_1

すなわち、

$$N_1 = \frac{kn_0}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \quad \cdots\cdots \text{①'}$$

となります。

逆にＢ座標に立って考えると、Ｂ座標の 1 秒はＡ座標の k 秒に相当します。（ここでも正に「相対的」だ！）n_2 は静止しているＢ系から見た振動数だから、これをＡ系上のカウンターがＡ系の 1 秒当たりに受け取る（つまりＢ系の $\dfrac{1}{k}$ 秒あたりに発出された）振動数に修正すると、 n_2 を $\dfrac{1}{k}$ 倍して、N_2 は $\dfrac{1}{k}\,n_2$　つまり、

$$N_2 = \frac{1}{k} n_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$ ・・・・・ ②’となります。

相手が真空だと、Aが動くと考えてもBが動くと考えても同じにならなければならないので、①’と②’とを等しい　$N_1 = N_2$　と置いてみましょう。

$$\frac{kn_0}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{n_0\left(1+\frac{v}{c}\right)}{k}$$

$$\therefore \quad k^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

（kは１より小さい！）

となります。

結局、ある系から運動系を見ると、振動数（時計の振動の数)、つまり時間が運動系では遅れることを意味します。結論として、光のドップラー効果は、

$$n_3 = N_1 = N_2 = n_1 k = n_2 \frac{1}{k}$$ ですから、

$$n_3 = \frac{kn_0}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}$$ 又は $$n_3 = n_0 \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)}} = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

（kを使った式）　（kを使わない式）

この最後の式の形が時間の効果を良く現しているので使う。

光源が相対的に近づく場合は、振動数が増える＝波長が短くなる「青方変位」ですが、ハッブルの観測のように互いに遠ざかる星の光は、振動数が減る＝波長が長くなる「赤方変位」が起こります。

$$n_3 = n_0 \frac{\left(1 + \frac{v}{C}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)}}$$

時間の延び

光の媒質として「エーテル」が仮想され、その存在を証明するために、マイケルソン・モーリーの実験など、いろいろな実験が行われました。しかし、どんな実験をしても「エーテル」は見つかりませんでした。

真空中に、光の媒質はありません。電磁気の理論から、どんな系でも、光速度は一定です。だから、現象は１つ。観測者と波源のどちらが近づいても、同じ振動数になります。

さて、最初に置いた前提から、Ａ座標系の時間経過$\varDelta T_A$は、運動系Ｂでの時間経過$\varDelta T_B$と次のような関係になります。

$$\varDelta T_B = \varDelta T_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

あるいは同じ事実の言いかえですが、B系の時計でΔT_B秒経った時には、A系では

これを　$$\Delta T_A = \Delta T_B \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ 秒と観測するわけです。

例えば、$\frac{v}{C}$が 87%くらいなら、B の 1 秒は A 系から見ると 2 秒間に延びて観測されるでしょう。実際、宇宙から飛んでくる粒子の観測寿命は延びて計測されます。

ローレンツ短縮

次に「長さ」、「空間の距離」について考えてみましょう。ある静止系から運動系を見て、ΔT_A 秒間に光の進む距離を求めてみましょう。その場合、距離は、例えば $\Delta L_A = C\Delta T_A$ というように、光速度と時間の積で表すことができます。その座標系にくくりつけた「物差し」を使ってその系で測定した長さを L_0 とし、これをその物差しの「固有長さ」とします。

どのように相対運動している系でも、それぞれの系で計った光速度は不変である（したがって、他の系の光速度もまた不変）という「光速度不変の原理」をおけば、静止系から運動系の物差しの長さは、　$$\Delta L_B = C\Delta T_B = C\Delta T_A\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$$

$$C\Delta T_A = C\Delta T_0 = \Delta L_0$$ として　（ΔT_0 はA系での固有時間といいます。）

$$\Delta L_B = \Delta L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$$

つまり、「運動系の長さを見ると短く見える」「運動系の長さは短縮して見える」というローレンツ短縮を導くこともできます。

ここでも、例えば$\frac{v}{C}$が 87%くらいだと、B系の長さはA系から見ると約半分になります。

時間の遅れは、長さの縮みとなって表れるのです（ローレンツ短縮）。

ローレンツ変換へ

ここまでで、いつもは授業の時間が無くなりますが、余裕のあるときは、時間や距離をそれぞれ t や x の座標の差に置き換えてやります。それだけで、簡単に、前に述べたローレンツ変換の式にたどり着くことができます。ここでは、これ以上はくどくなるので止めます。

まとめ　電磁気学習から相対論へ　そして量子の世界へ

「すべての事象は相対的である」という哲学は物理の基本的な大原則です。

ニュートンの力学は、巨視的な物体の物理学で、すべての慣性系の同等性を主張します。どの慣性系が特別に優位であるとか劣っているとかいう区別はしません。これは、それまでのアリストテレス的・キリスト教的世界観（天動説も太陽中心説もその流れ）の「絶対空間」論の否定でした。**つまり、すべての系は相対的であり、絶対的な基準系＝「絶対空間」などというものは存在しないとした革命的転換です。**（ところが、そのニュートンでさえも、瞬時に伝わる信号については否定しなかったので、すべての系に共通な<u>「絶対時間」の存在については自明の理</u>としていたのでした！）

ガリレイ変換は、等速運動をする慣性系間の座標変換であり、これによってニュートンの法

則（運動方程式）は、不変な形で変化します。ところが、空間（真空）の物理学ともいうべき電気や磁気を扱うようになると事情が変わってきます。たとえば、「静止系では、止まっている電荷の周りには電場しかないように見える。しかし、同じ電荷を運動系から眺めると磁場も発生している」というようなことが起きてしまうのです。系によって、電気と磁気の見え方が変わってしまうのです。

電荷などに働く力は、見方によって（観測する系によって）違うはずがありませんから、「自然現象は一つ」なのだという物理を基本にすえて、電場と磁場を「電磁場」として統合して、電磁気現象をどんな系でも同じにあつかえるように書き換えてやる必要が生まれました。

マックスウェル方程式を等速運動するほかの座標系（慣性系）に不変な形に変換するのが、ローレンツ変換です。（ローレンツは、この変換がマクスウェル方程式を不変な形で変換することを、1900 年に発見しました。このマックスウェル方程式を座標変換で不変にする条件としてローレンツ変換を導くやり方は難しいので省略します。例えば「ファインマンの物理」の電磁気学の教科書の最終章に出てくるような遅延ポテンシャルを使うやり方だと比較的簡単に導くことができます。）

ローレンツ変換は、マクスウェル方程式を不変な形で変換します。また、他の慣性系が動く相対速度 v が、光速度 C に比べて十分小さい場合（ $\frac{v}{C} \to 0$ と見なせる場合）は、ローレンツ変換はガリレイ変換に移行します（非相対論的な極限でガリレイ変換が成立しているということ）。こうした意味で、ローレンツ変換は、より包括的な基本法則といえます。

電磁気学の結論としての**ローレンツ変換によって、時間は空間と結びついていることが示されました。これによって、時空を統一的にとらえることができるようになり、「絶対空間」の否定は、すなわち「絶対時間」の否定となって現れます。ニュートン以来の第２の革命がおこります。時間も相対的であるとされたのです。**

逆にマクスウェル方程式がいかなる慣性系についても（形式上）不変であることを要請すると、ローレンツ変換の他に電（磁）場や、電流密度、電荷密度の変換までもが、自然に導かれることもわかりました。ローレンツはまだ媒質としてのエーテル仮説を置いていたのですが、この変換に根本的な解釈の変更をして相対性理論を発表したのが、アインシュタインでした。

私もかつてファインマン物理の電磁気の巻（の「電磁場の相対性」）の記述に新鮮な驚きを感じたものです。それで、それらを初学の高校生にどのようにして伝えるべきかについて、考えました。アインシュタインは当時のエーテルの存在可否論争のもとで、「相対性原理」の他になお「光速度一定の原理」をおいて 彼の(特殊)相対性理論を展開したのですが（電磁気学からすれば必然的に C 一定（$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ は出てくる)、この第２公理「光速度一定の原理」は（回転や重力を扱う加速系での一般相対性理論ではあえて必要だとの論もあるが ・・・・・）現代では電磁気学の結論として言わずもがなですね。

このようにして電磁気学の成立は、必然的に相対論への道を開き、人類に時空間への新しい認識を開いたのです。特殊相対論の入り口については、波のドップラー効果を少し掘り下げて真空中の光を考察すると、簡単なアプローチが可能になることを示しました。

高校３年で電磁気の基本法則を学んだあとは、もちろんもう一度相対論に触れて、さらに光電効果などから量子論の初めまで、スムースな授業の流れが組めました。これらについては、また稿を改めることにしましょう。これらの糸口を開いたのが、いずれもアインシュタインであったことも印象深い歴史的事実です。

ここまで「保田震災記」を著した物理学者・石原純の話から始まって、四半世紀前に千葉物理サークルで実践した電磁気学習と相対論の入り口の授業を振り返ることになりました。『コロイド』への１年間の連載になりましたが、昔を思い出して書いてみました。

ご愛読ありがとうございました。みなさま方へ何らかの参考になればと思っております。

保田震災記

石原純と原阿佐緒

2021.1 〜 2022.1

南房総にて　朝生邦夫 記

まとめ　電磁気学で何を学ばせたいか

以上をまとめてみると,電磁気の体系を次のように展開したいということになります。まず手近かな I　と Qとを手がかりに、それらを自由に扱えコントロールできる経験を積ませた上で、目にも見えず手にも触れられない真空の場　EとBとの実在を　(IとQ との力学的相互作用によって)　確かめ、その相互発生関係を確認することが大切です。

このことがそういう性質をもった真空の場の実在についての認識を深め、その相対的な効果について人間の思考をより豊かにしてくれるのではないかと思われます。

<注および文献>

注1:この電磁気学習のプランの骨子は既に30年も前,1970年代から千葉物理サークルを中心として実践されてきた実験中心電磁気学」です。林淳一,稲葉正,桜井謙聿、石井信也氏など,諸先達の理論と実践があります。

例えば

◎「電磁気学習の自主編成の試み」(その1 〜3)『理科教室』1971年9月10月11 月号(Vo114 No.9〜No.ll)稲葉正他

◎「楽しく学べる電気の実験」『理科教室』 1976年11月号増刊号(Vo119 No.12)科教協 千葉サークル

◎「電流と磁界」理科教室「主張」1978　年 10月号(Vo121 No.10)石井信也

注2 :千葉物理サークルの電磁気授業の典型としては,『高校物理の授業100時間』石井信也あずみの書房1990 下巻に詳しい紹介があります。

注3:ファラデー効果の実験など面白い実験については,『たのしくわかる物理実験辞典』左巻健男・滝川洋二編 東京書籍1998の中の朝生邦夫執筆項など参照してください。

編集後記

長さの単位であるメートル(m)は、北極から赤道までの距離を１万 m として基準となるメートル原器がつくられたところから始まります。その後、紆余曲折があって、現在では真空中の光速が基準になっています、朝生さんの連載を読むと、その理由がよくわかります。「光速度一定の原理」が生かされているのです。

(濱中　記)

千葉方式電磁気学習を振り返って［補遺］

光のドップラー効果から 膨張宇宙論（ハッブルの法則）へ

朝 生　邦 夫　　元千葉県立高等学校教員

ここまでの結論として、互いに「接近する場合」の光のドップラー効果は、振動数 n の式で

$$n_3=\frac{kn_0}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \quad \text{又は} \quad n_3=n_0\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)}}$$

と書けました。（この k は「相対論的時間の遅れ」を表わす要因であることに注意！）

互いに「遠ざかる場合」には、v を $-v$ と置けばよく、

$$n_3=\frac{kn_0}{\left(1+\frac{v}{c}\right)} \quad \text{又は} \quad n_3=n_0\frac{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}=\boxed{n_0\cdot\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}}$$

四角で囲った式が、ローレンツ変換の時間寄与を表していて、意味がわかりやすいかな？
互いに遠ざかる場合には、観測される振動数 n_3 は元の振動数 n_0 よりも小さくなります。

互いに「遠ざかる場合」を波長 λ の式で表示にしてやれば、

$$\lambda_3=\frac{k\lambda_0}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \quad \text{又は} \quad \lambda_3=\lambda_0\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)}}=\lambda_0\cdot\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

（注）　$C=n\lambda$ から、振動数 n の式に　$n=\frac{C}{\lambda}$ を代入すると、

$$\frac{C}{\lambda_3}=\frac{C}{\lambda_0}\cdot\frac{k}{\left(1+\frac{v}{C}\right)} \qquad \lambda_3=\lambda_0\frac{\left(1+\frac{v}{C}\right)}{k} \qquad k=\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{C^2}\right)}$$

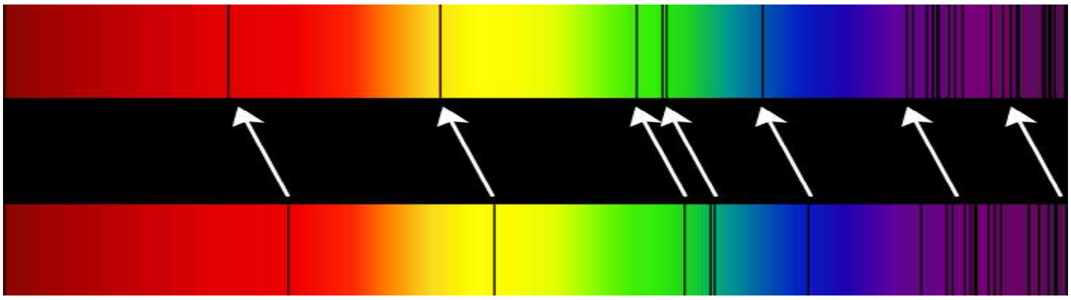
だから、

$$\lambda_3=\lambda_0\frac{\left(1+\frac{v}{C}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{C^2}\right)}}$$

振動数で表した式から波長で表した式に書き換えられます。

観測される波長 λ_3 は、元の波長 λ_0 よりも長くなります。
光源が相対的に離れる場合は振動数が減る＝波長が長くなる（ハッブルが観測したように互いに遠ざかる星の光は赤くなる「赤方遷移」Red Shift ）という現象がおこるわけです。

赤色光 波長 長い



紫色光 波長 短い

Red Shift　赤方遷移

太陽光のスペクトル（下）と比べ、遠方の銀河の光のスペクトル（上）は、フラウンホーファー線がより長波長側（赤い方）にずれている（Wikipedia より）。

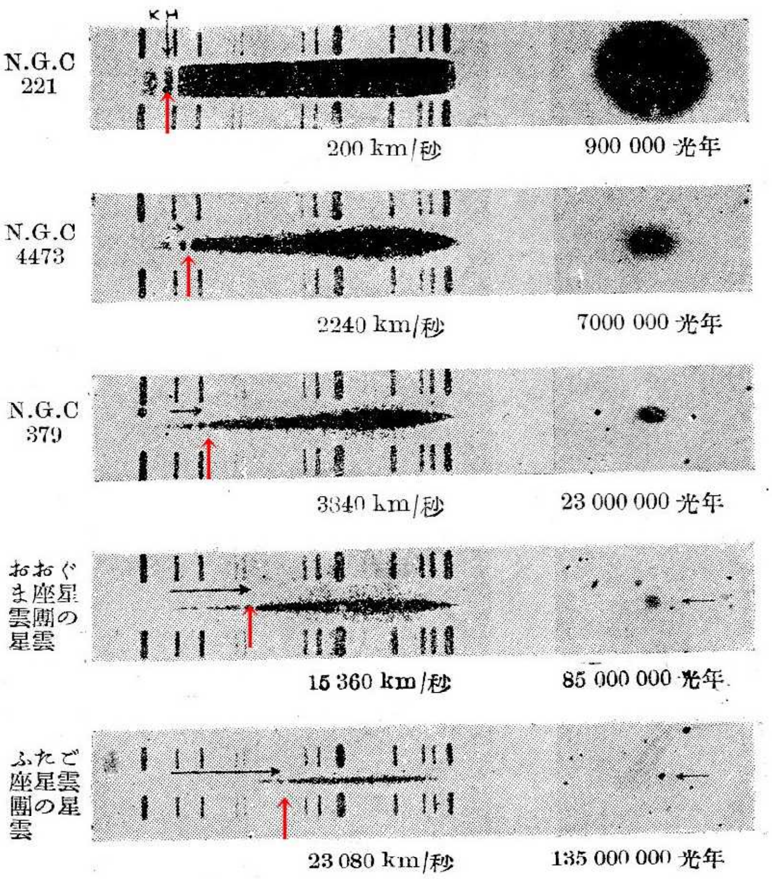
特定の元素から出る光の振動数に注目すると、後退する星や銀河から届くそれらの光の振動数は、静止している場合よりも小さくなり、その差 $\varDelta n$ は、2次以降の項を省略すると

$$\varDelta n = n_0 - n_3 = n_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{C}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{C}\right)}} \right) \fallingdotseq n_0 \frac{v}{C}$$ となります。*

波長の式で表せば、その差 $\varDelta\lambda$ は、同様に

$$\varDelta\lambda = \lambda_3 - \lambda_0 = \lambda_0 \left(\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{C}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{C}\right)}} - 1 \right) \fallingdotseq \lambda_0 \frac{v}{C}$$ となります。*

一次近似では $\frac{\varDelta\lambda}{\lambda_0} \fallingdotseq \frac{v}{C}$ だから、これを測って後退速度 v を求められます。



エドウィン・ハッブルは、1929 年、遠くの銀河ほど後退速度が大きいことをカルシウム原子の発光線スペクトルが長波長帯にずれる割合から発見しました。

左の写真はハッブルが、いろいろの銀河について、

カルシウムのスペクトルを撮って並べたもの。

赤い矢印の部分が遠くの銀河ほど Red Shift している。

$\frac{\varDelta\lambda}{\lambda_0} \fallingdotseq \frac{v}{C}$ から、

後退速度 v が求められる。

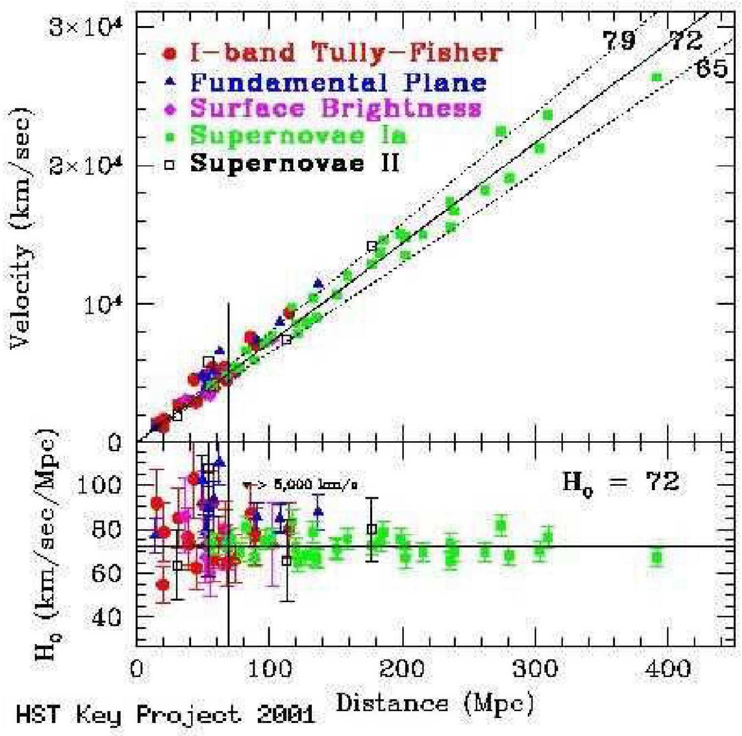
最初に「膨張宇宙」を示した証拠写真といえる。

（↑赤矢印は筆者の表示）

$\boldsymbol{v} = \mathbf{H_0 \cdot D}$　　H0 はハッブル定数、v は後退速度、D は銀河までの距離。

遠い銀河ほど後退速度が大きいということは、われわれの宇宙が膨張していることを示しています。観測によって精度よくハッブル定数を求めることができたので、これを使って銀河までの距離 D を後退速度 v で割ることによって、宇宙の始まりの時間がわかることになりますね。（観測できる最遠方 R の銀河は光速 C で後退するものとして、$C = H_0 \cdot R$ より、宇宙年齢の時間 t_H は、 $t_H = \dfrac{R}{C} = \dfrac{1}{H_0}$ で求めることができます。）

（実例）　　**ハッブル宇宙望遠鏡による最近の $\boldsymbol{v}$－D 図**



宇宙の年齢の計算方法

ハッブルの法則 $\boldsymbol{v} = \mathbf{H_0 \cdot D}$ から、観測できる宇宙の果てまでの距離を R とします。そこでは、宇宙が光速 C で後退していますから、$C = H_0 \cdot R$ となり、$\dfrac{R}{C} = \dfrac{D}{v} = \dfrac{1}{H_0} = t_H$

ハッブル定数の逆数 t_H はハッブル時間と呼ばれていて、宇宙が誕生時点からずっと変わらない割合で膨張していると考えたときの宇宙の年齢を表わすものです。なぜなら H0 の単位は速度を距離で割るのだから、時間の逆数になります。だから $\dfrac{1}{H_0}$ を求めれば、$\dfrac{R}{C}$（宇宙半径÷光速度）すなわち宇宙が始まってから経過した時間 t_H がおおよそわかるわけです。

上に得られた観測データから $H_0 = 72$（km／s／Mpc）$= \dfrac{72\ (\text{km/s})}{1\ (\text{Mpc}^{※})}$

※メガパーセク；1Mpc ＝ 3.26 × 10^6 光年。pc は、距離の天文学的表示で 1pc ＝ 3.26 光年

$\overline{3.09 \times 10^{19}\ (\mathrm{km})}$

$$t_H = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{2.33} \times 10^{18}\ (\mathrm{s}) = 4.3 \times 10^{17}\ (\mathrm{s}) = 1.36 \times 10^{10}\ (\mathrm{year})$$

すなわち、136億年となります。

情報

宇宙の年齢論争に終止符か？アタカマ宇宙望遠鏡による観測データ（2021年1月）

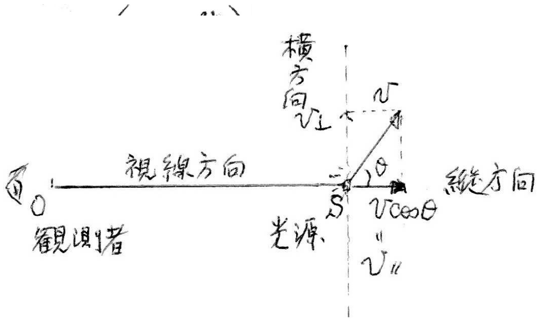
アタカマ宇宙望遠鏡※による最新の観測データを用いて宇宙の年齢を導出したところ、137億7000万年という従来の研究結果と一致する値が得られた。これは98GHz ※※と150GHz での宇宙マイクロ波背景放射スペクトルの測定によるものである。観測値は、H_0 = 67.6（km／s／Mpc）のハッブル定数を示している。これは、地球から 1Mpc（約 326 万光年）の物体が、宇宙の膨張により、67.6km／s で遠ざかっていることを意味している。

※南米チリの高地に東京大学が建設した。 ※※ギガヘルツ（10^9 ヘルツ）。振動数が GHz になる電磁波をマイクロ波という。

さて、相対論的考察でしか、出てこないドップラー効果があります。
それは「横方向のドップラー効果」です。それについて考えておきましょう。
もう一度、ローレンツ変換の式に立ち返りましょう。

星や銀河の場合、後退速度がメインになるので「互いに遠ざかる場合」について考察します。改めて振動数 n_0 の光を観測して n' になったとしましょう。（今までの n_3 のこと）

$n' = \frac{1}{k} n_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ で、通常の媒質のある波（音の場合など）のドップラー効果の式（二次以降は $v << C$ として省略して）と比べてみると $\frac{1}{k}$ の要素つまり時間の伸縮という相対論的効果だけ異なっていることがわかります。



一般的に、$\overline{\mathrm{OS}}$ に対して θ の角度で運動すると、視線方向（縦方向）の S に対する速度は $v\cos\theta$ となるので、上辺の v を $v\cos\theta$ と補正してやればよい。

$n' = \frac{n_0}{k}\left(1 - \frac{v\cos\theta}{c}\right)$ となります。

$k = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$ を代入して書き換えてやれば

光のドップラー効果の式

$$n' = n_0 \frac{\left(1 - \frac{v\cos\theta}{c}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

という一般式を導けます。

もちろん、θ=0　と置けば $n'_{/\!/\text{縦}} = n_0 \dfrac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$ 　となり、前の結論と同じです。
（平行）　　　　　　　　　　　　　　　　　　（縦方向ドップラー効果）

ここで、θ=π/2　と置けば $n'_{\perp\,\text{横}} = n_0 \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$ （横方向ドップラー効果）となり、
（垂直）

通常の音などの波では見られない特殊相対論特有の効果が現れます。

これは、運動する系の時間の伸びによってのみ説明される現象です。つまり、運動する系を眺めたときに、その振動数が小さくなる（パルス信号の間隔が長くなる）現象なのです。

したがって、「横方向ドップラー効果」が確認されれば、相対論の正当性の証明となります。

ただ、$\triangle n_2 = n_0 - n_1{}' = n_0 \left\{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\right\} \quad \dfrac{n_0{}^2}{2}\left(\dfrac{v}{C}\right)^2$ となり、

その効果は「縦方向のドップラー効果」より変化が小さいので、検出困難ですが ･････ 。

アインシュタインによって予言されたこの効果の直接的な証明はなかなかできませんでしたが、予言から 50 年以上たった後、1960 年代以降試みられるようになりました。原子振動からの放射光や最近では高速高エネルギー粒子ビームの観測などで実現できるようになったのです。

編集後記

教員になったばかりのころは、なかなな授業がうまくいきませんでした。でも、校庭の雑草を調べる授業はうまくいきました。雑草に名前があり、種類ごとに生活の仕方が違うということが、生徒たちには新鮮だったようです。生徒たちは、楽しみながら学習に取り組みました。日浦さんの検索表はそのときに使った教材の１つです。

朝生さんの連載「千葉方式電磁気学習を振り返って」は、ひろく読まれていたようです。私には感想が、朝生さんには質問が寄せられています。連載の補足として、宇宙の膨張はどのようにして発見されたかというお話しが送られてきました。計算式は難しくありません。順になぞれば、なるほどと納得できると思います。　　　　（濱中）

ここまでは、科学教育研究協議会(科協教)千葉支部の機関誌「コロイド」に　2021年から2022年にかけて連載されたものです。編集は濱中修さんの手によるものです。
連載が終了した後、補足・追加してまとめてみました。内容をよく吟味して校正してくださった濱中さんに感謝いたします。
このページ以降は、追加部分となります。　　　　　　　　　　　2023年4月　朝生邦夫　記

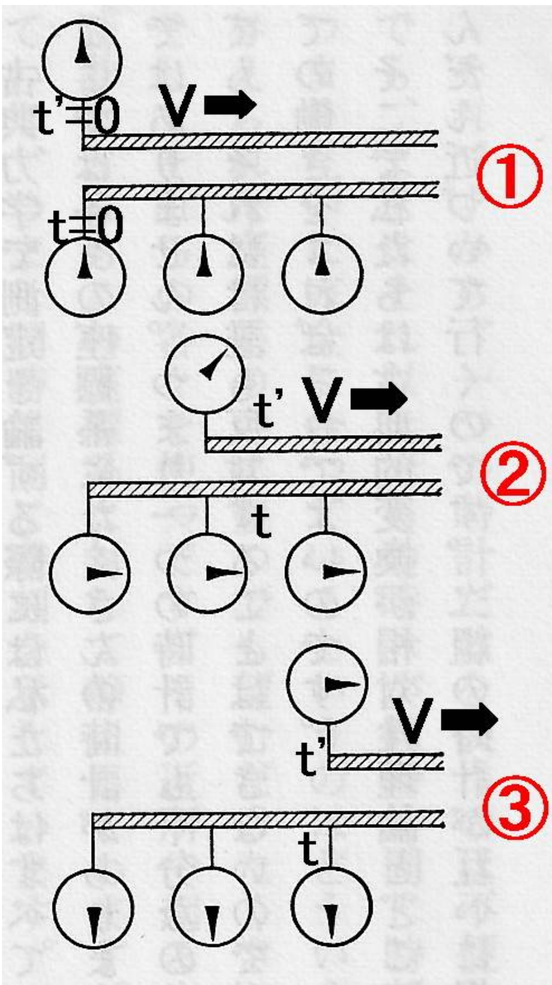
付録　　　相対論の連載の発展

今までの８回の連載で、電磁気と相対論の入り口の学習を紹介してきましたが、いくつかの質問があったので、それに答えるつもりで補足を書いておこうと思います。

Ｉ.相対論の本質とローレンツ変換の最も簡単な導き方

２０２２年４月　コロイド読者からの質問に答えて

ここまで述べてきた内容で、「特殊相対論」の要点を一言で言い表すなら、
「相対的に運動している慣性系の時間の進み方は遅れる」ということです。
連載第６回の４１ページの図を再掲します。



上の運動系をＢ系
左端で時計は合わせてある。

下の静止系をＡ系とする。

上のＢ系が運動すると ‥‥‥

下のＡ系に対してＶで右に動く。

上のＢ系の時計は遅れる。
（ 時間の刻み方が小さくなる）
遅れ方は一様である。

「物理学はいかに創られたか」（アインシュタイン、石原純訳）より改変。
記号の挿入と説明は筆者

このことから次の結果がみちびけますね。

時間の延び

最初に置いた前提から、
A 座標系の時間経過⊿T_A は運動系 B での時間経過⊿T_B と次のような関係になります。

$$⊿T_B=⊿T_A \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

あるいは同じ事実の言いかえですが、B 系の時計で⊿T_B 秒経った時には、A 系では
これを

$$⊿T_A=⊿T_B \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ 秒と観測するわけです。

例えば、$\frac{v}{c}$ が 87%くらいなら、B の 1 秒は A 系から見ると 2 秒間に延びて観測されるでしょう。実際宇宙から飛んでくる粒子の観測寿命は延びて計測されます。

Lorentz 短縮

次に「長さ」、「空間の距離」について考えてみましょう。ある静止系から運動系を見て、⊿T_A(秒)間に光の進む距離を求めてみましょう。その場合、距離は例えば
⊿L_A=c⊿T_A というように、光速度と時間の積で表すことができます。その座標系にくくりつけた「物差し」を使ってその系で測定した長さを L_0 とし、これをその物差しの「固有長さ」とします。

どのように相対運動している系でも、それぞれの系で計った光速度は不変である（したがって、他の系の光速度もまた不変）という「光速度不変の原理」をおけば、静止系から運動系の物差しの長さは、⊿L_B=C⊿T_B= C・⊿ $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ T_A

c⊿T_A=c⊿T_0=⊿L_0 として （⊿T_0 は A 系での固有時間といいます。）

⊿L_B= $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ・⊿L_0 つまり、「運動系の長さを見ると短く見える」
「運動系の長さは短縮して見える」
というローレンツ短縮を導くこともできます。

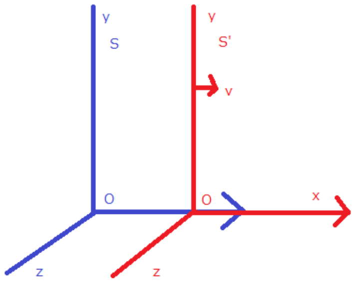
ここでも、例えば $\frac{v}{c}$ が 87%くらいだと、B 系の長さは A 系から見ると約半分になります。
時間の遅れは、長さの縮みとなって表れるのです。（Lorentz 短縮）

ローレンツ変換へ

ここまでで、いつもは授業の時間が無くなりますが、余裕のあるときは、時間や距離をそれぞれ t や x の座標の差に置き換えてやるだけで簡単に、前に述べたローレンツ変換の式にたどり着くことができます。ここまでが本文でしたが、「最後まで示してくれ」という声がありましたので、ここから先を述べておきます。

Lorentz 短縮から求める最も簡単な Lorentz 変換の方法

（註）これ以外の方法については後述[参考]参照。



A 系（S）、運動系 B 系（S'）とすると
点 P の時空に占める位置は
P（x,t）
P（x',t'）　　　と書けます。

t、t'　の関係は運動系の時間が遅れることから

$\varDelta T_A = t_2 - t_1$　、$\varDelta T_B = t_2' - t_1'$　　と置けば

$$k=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

だけ時間の刻みが小さくなることが相対論の本質だったから、

A で測った時間は　$\varDelta T_A = \varDelta T_B \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　（$\varDelta T_B$:B の時間より長い、大きい）

また、

$\varDelta L_B = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \varDelta L_0$　という Lorentz 短縮も既習ですね。

すると、B 系の x'　は　その Lorentz 短縮した長さが A 系での（x－vt）なので
B 系の長さとしての x' は、

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

となる。

また、x'=ct'　　x=ct　と置き換えて t'　の変換式を得ることができます。

$$c\ t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(ct - vt)$$

c で割って

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - vct/c^2)$$

ct=x だから

$$\therefore\quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - vx/c^2)$$

Lorentz 変換式となります。

［参考］　　　　ローレンツ変換の簡単な導き方

(1)　アインシュタイン流の簡単な方法　球面波方程式より①

静止系 K(x,y,z,t) とそれに対して x 軸方向へ速度 v で運動している系 K'(x',y',z',t') の間の関係式を求める.

t=0 の瞬間,両者の原点は一致していたとする.この同じ t=0 の瞬間,K 系の原点から光が放たれたとするとこの光は全方向に飛び去って,t 秒後には原点から半径 ct だけ離れた球面上の点に分布するはずである.これを式で表せば,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad ①$$ となる.高校で習う球面の方程式である.

一方,K'系の原点にいる観測者も光が自分を中心に同心円状に広がるように見えるというのが相対性理論の要求する基本原理である.この状況は同じように,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad ②$$ と書ける.

②の式で $(ct)^2$ とせずに $(ct')^2$ としたのは、x が K’系でガリレイ変換では(x-vt)となるが、そうなると明らかに t を不変とすると②の式は成り立たなくなるので、t'(ダッシュ)として x'を(x－vt)の要素にある係数をかけたものと仮定するのである。

さて,K 系から K'系への変換を求める　（y,z 軸は変化を受けないものとする）

$x' = A(x - vt)$

$y' = y$　、$z' = z$

$t' = Bx + Dt$　　という変換がおこるとする。

これらの未定係数 A,B,D を求めてやればよい!

そこで、この x'、t'　を②式に放り込んで　y,z を除いてやると

$(A^2 - c^2B^2)x^2 = (c^2D^2 - v^2A^2)t^2 + (2vA^2 + 2c^2BD)xt$　と書けるから

①式から y,z を除いた　$x^2 = (ct)^2$　と一致させるには

$A^2 - c^2B^2 = 1$

$c^2D^2 - v^2A^2 = c^2$

$2vA^2 + 2c^2BD = 0$　　となることが要請される。

ゴタゴタとする計算を経て 3 本の連立方程式から A,B,D を求めることができる。

$$A = D = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$　B の複号は A と D が正の条件よりマイナスを採る。

結局、ローレンツ変換は、 $x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$

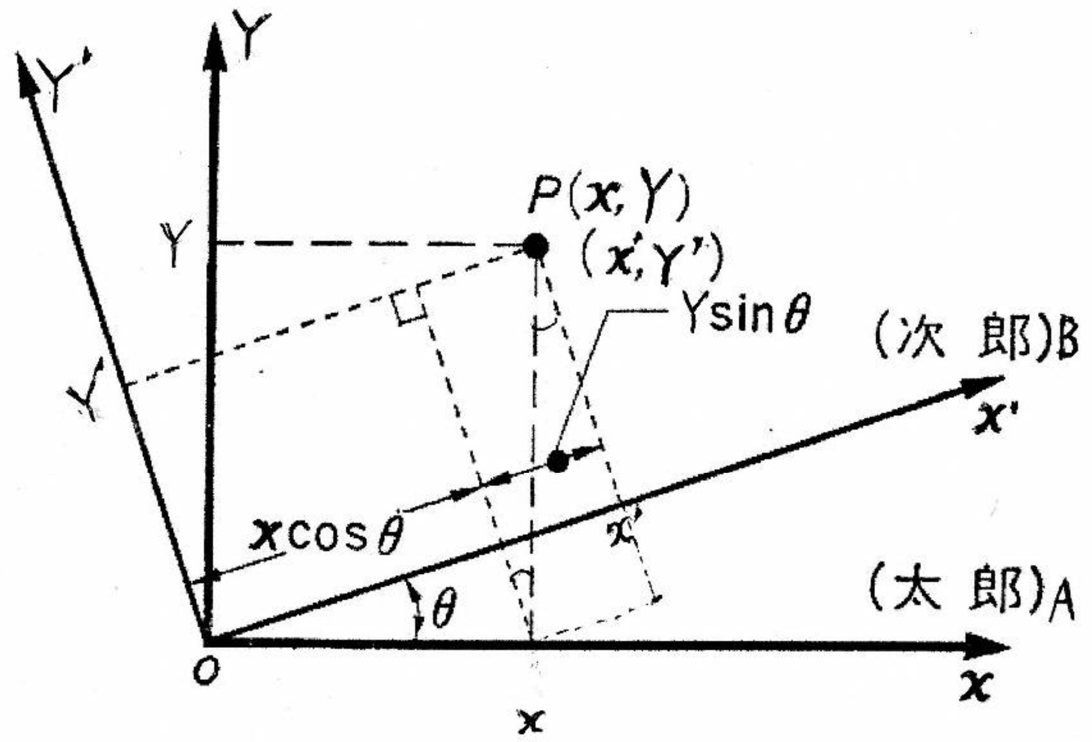
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

と書ける。

（2）ベクトルの回転によるローレンツ変換

Lorentz 変換の x’の式、t’の式をよく見ると、x’も t’も x と t との 1 次結合の形式で書かれており、ベクトル回転の式とはよく似ている。両座標の「距離」が等しくなるという点でもこれらは形式が似ていませんかね。回転座標の表示の変換はよく知られており、

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$



これを復習して整理してみると

$$x' = x\cos\theta + Y\sin\theta \quad \cdots\cdots⑥$$
$$Y' = Y\cos\theta - x\sin\theta \quad \cdots\cdots⑦$$

x-Y 座標を K 系(太郎の系 A)、x'-Y'座標を K'系(次郎の系 B)とする

K 座標で　$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$　①

K'座標で　$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$　②

$y' = y$　$z' = z$　なので、

$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$　③

ここで、幾何学的回転で扱えるように

ict=Y　 ict'=Y'　 ④　と置いてみる。すると、$\frac{dY}{dt}$=ic 、t'=$\frac{Y'}{ic}$

$$x' = x\cos\theta + Y\sin\theta \qquad ⑤$$

$$Y' = Y\cos\theta - x\sin\theta \qquad ⑥$$

今、x'=0（原点）で、v= $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt}$　 ⑤式で　x'=0 と入れれば　 $\frac{dx}{dY} = -\tan\theta$

④より　$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dY} \cdot \frac{dY}{dt} = \frac{dx}{dY} \cdot ic$

$$\tan\theta = -\frac{dx}{dY} = -\frac{1}{ic} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\tan\theta = -\frac{v}{ic} = \frac{iv}{c} \qquad ⑦ \qquad \rightarrow \qquad \tan^2\theta = -\frac{v^2}{c^2}$$

$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$　よって　$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\sin\theta = \pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$　よって　符号も考えて

$$\sin\theta = \frac{\frac{iv}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

これらを　⑤式に代入して、t、t'　に戻してやると

$x' = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍 ＋　$Y \cdot \frac{iv}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍

$Y' = Y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍 －　$x \cdot \frac{iv}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍

これらから x'　と　t'　の変換式を整理すると

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

という　ローレンツ変換の式となる。

発展　もう少し正確に角度θも虚数角 iθと置き換えてみると

直交座標の回転による変換、ローレンツ変換へ

ローレンツ変換の式は次の①、②のようにあらわせる。これらを座標回転から求める。

x'=x$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　　①

t'= t$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-$ x$\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　　②

(復習)　オイラーの公式より　虚数 i を使って三角関数をあらわすと

θ→iθ　と置くことによって

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

よって

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$　　さらに　θ→iθ　と置いて

ハイパボリック三角関数を　$\cos(i\theta)=\cos h\theta$　$\sin(i\theta)=\sin h\theta$　と定義すれば

$$\cos h\theta=\cos(i\theta)=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

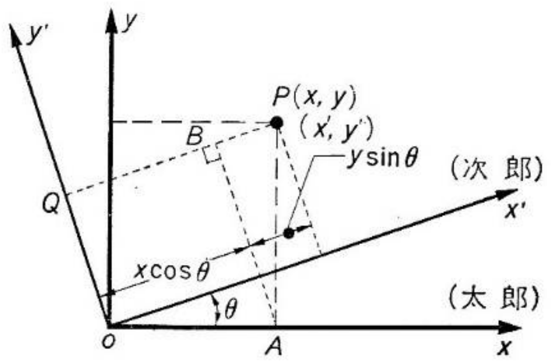
$$\sin h\theta=-\sin(i\theta)=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

よって　$\tan h\theta=-i\tan(i\theta)$

$$\{\cos(i\theta)^2\}-\{-i\sin(i\theta)^2\}=\left\{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right\}^2-\left\{\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4}-\frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4}=1$$

$\cos(i\theta)=\cos h\theta=X$　$\sin(i\theta)=\sin h\theta=Y$　と置いてやれば

$X^2-Y^2=1$ *となって、これは*　X−Y 平面における双曲線を表している。



先の回転座標では、y 軸に当たる時間軸 t、角度 θ に実数をとってきたが、
オイラーにまねて、思い切って y(y')軸に ict(ict')、角度に i θ をとることにする。
虚数時空間での回転を考えるわけだね。 座標回転の式

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

に θ→i θ 、y→ict 、y'→ict'を入れると

$$x' = x\cos(i\,\theta) + i\,c\,t\sin(i\,\theta)$$

$$i\,ct' = i\,c\,t\cos(i\,\theta) - x\sin(i\,\theta)$$

これを知られているハイパボリック三角関数の形にして

$$x' = x\cos h\theta + c\,t\sin h\theta \qquad ③$$

$$i\,ct' = i\,c\,t\cos h\theta - i\,x\sin h\theta$$

下の式を両辺 ic で割って書き換えてやると

$$t' = t\cos h\theta + \frac{x}{c}\sin h\theta \qquad ④$$

又 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ だから、両辺を $\cos^2\theta$ で割って θ を iθ に置き換えれば

$1-\tanh^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta}$ となる。ここで $\frac{v}{c} = -\tanh\theta$ と置くことができるから

(∵ ③の x' の式で x' ＝0 と置いて t で微分すれば、$v = \frac{dx}{dt}$ から導ける)

$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$ ∴ $\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\sinh\theta = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ となるから、

これらを③、④の x'と t'の式に直してやると

$$x' = x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = t\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - x\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ となって

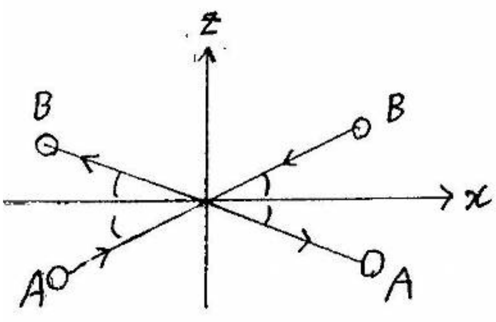
ローレンツ変換の式が求められる。 (注釈 おわり)

Ⅲ、 相対論的質量　相対論的力学　　（さらに相対論の力学へ）

有名な質量エネルギー式や相対論的力学について触れておきましょう。

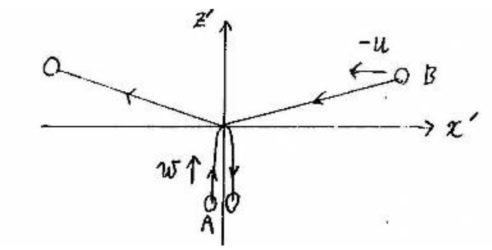
相対的に運動する系の時間が遅れることは、力学の基本である質量概念にも変更を迫ります。

横方向ドップラー効果を考えて、運動方向と垂直な面の中での完全弾性衝突をする粒子を仮定しましょう。結論から言うと運動量保存則はどの系からも言える基本則なので、



左図のような衝突で、
横方向 x 方向での運動量保存は明らかです。
従ってここでは縦方向（y または z 軸方向）の運動量保存を考えましょう。（図は縦方向を z 軸表記）

A 粒子が止まって見えるように、観測者が x 方向に運動してこの現象を見ると下図のように見えます。



この時、A の運動量変化は２$m_0 w$　ですね。…①
一方 B の縦成分の運動を考えると縦は Lorentz 短縮しないので、縦方向距離が変わらずに時間が延びるから、静止系から見て B の一定時間に運動する距離、即ち速度は小さくなる（!）ことが「横方向ドップラー効果」から言えます。B の縦方向（z 成分）速度は

$$w' = u\tan\theta = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,w$$

静止系の質量を m_0、運動系の質量を m（=m（u））とすれば、B の縦方向運動量変化は

$$2\,m_0 w' = 2\,m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,w \quad \cdots②$$

これが等しいから　①=②とおいて

$$\frac{m_0}{m(u)} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

よって

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

「時間の延び」は速度によって変化する「相対論的質量」へと認識の変更を迫るのです。

速度が小さい場合に質量の増しをあらわす近似式を求めるには，

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

を，二項定理を使ってべき級数に展開すればよい．

$$m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)$$

$$m \cong m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

m は相対論的一般質量
m_0は静止質量。
これの両辺に c^2をかけて整理すれば、

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots$$

右辺第２項はニュートン力学での運動エネルギーですから、mc^2　は一般エネルギー、m_0c^2 は静止エネルギーと呼ばれます。 物質は静止していても m_0c^2　のエネルギーとして表わされるのです。質量が他のエネルギーに転換するとき、c^2 がかかりますからたとえ少量でも桁違いのエネルギーとなります。核エネルギーはその転換の典型例です。

相対論的一般質量を $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と書くことはあまり多くありません。むしろ、

これを変形して、エネルギーE= mc^2　や、運動量 P=mv　の表記に置き換えておいて

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$m^2(1-v^2/c^2)=m_0{}^2$　より
$(m^2c^2)-(mv)^2 = m_0{}^2c^2$　　$\times c^2$
$(m^2c^4)-(mv)^2c^2= m_0{}^2c^4$
$(mc^2)^2-(mv)^2c^2= m_0{}^2c^4$
$\underline{E^2 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4}$　（Kaufmann カウフマンの式）

または、　エネルギーE= mc^2　や、運動量 P=mv　より
$\underline{Pc = Ev／c}$　と書いて利用しています。
（こういう書き方にして適用しやすくするケースが多いのです。）

このような質量の再定義をしてあげると、(ニュートンの)運動方程式は

$$F = d(mv)／dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d(m_0 v)／dt$$　と書きかえられます。

このとき運動量表記は $P = mv = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v$　となりますね。

ここまでで一応の補足解説とします。

「相対論」の本質は、時間の遅れだけです。

決して難しいものではないことが分かっていただければ幸いです。